$$\Leftrightarrow x \le \sqrt{x^2+4x} \le x+2 \Leftrightarrow 2x+2 \le x+2+\sqrt{x^2+4x} \le 2(x+2)$$
$$\Leftrightarrow x+1 \le \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} \le x+2.$$

b- θ est dérivable sur $[1;+\infty[$ (somme de deux fonctions dérivables)

• $\forall x \in [1;+\infty[; \theta'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} - \frac{1}{2}$

$\otimes$ $x \in [1;+\infty[\Rightarrow x^2+4x > 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} < \frac{1}{2}$$

D'où $\theta'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \theta$ est strictement $\searrow$ sur $[1;+\infty[$

θ est continue et strictement $\searrow$ sur $[1;4]$, $\theta(1) \approx 0,46>0$ et $\theta(4) \approx -0,24<0$

$\Rightarrow$ l'équation $\theta(x)=0$ possède une seule solution γ dans $]1,4[$.

2/a) • $u_0 = 1 \in [1,2] \Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 0$.

⋆ Soit $p \in$ IN. Supposition que $u_p \in [1,2]$; montrons que $u_{p+1} \in [1,2]$. En effet

$1 \le u_p \le 2 \Leftrightarrow 2 \le 2u_p \le 4$

$\Leftrightarrow f(2) \le f(2u_p) \le f(4) \Leftrightarrow f(2) \le u_{p+1} \le f(4)$

Or $f(2) \ge \text{Log}(2+1) = \text{Log}3 > 1$ car $3>e$.

aussi $f(4) \le \text{Log}6 \le 2$ car $6 < e^2$.

D'où $1 \le u_{p+1} \le 2$ donc la supposition est vraie à l'ordre p+1.

Conclusion : • et ⋆ $\Rightarrow \forall n \in$ IN$; u_n \in [1,2]$.

b) • $1 \le x \le 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x^2 \le 16 \\ 4 \le 4x \le 16 \end{cases}$ alors $5 \le x^2+4x \le 32$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \le \sqrt{x^2+4x} \le \sqrt{32}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{32}} \le \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}} \le \frac{1}{\sqrt{5}}$$

D'où $\forall x \in [1,4]; |f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{5}}$

Ainsi

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [1,4] \\ \forall x \in [1,4]; |f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in ([1,4])^2; |f(x)-f(y)| \le \frac{1}{\sqrt{5}}|x-y|$

Or $\forall n \in$ IN$; u_n \in [1,2] \Rightarrow \forall n \in$ IN$; 2u_n \in [1,4]$